Elektronica en Telecommunicatie 8

Gemeenschappelijke publikatie van de
Sectie voor Telecommunicatietechniek van het K.I.v.I. en het
Nederlands Elektronica- en Radiogenootschap.
Redactie-adres: Prinsessegracht 23, Den Haag.

621.391.822:621.372.5

Karakteristieke ruistemperaturen van elektrische netwerken

door dr. ir. H. Bosma, Natuurkundig Laboratorium N.V. Philips' Gloeilampenfabrieken, Eindhoven

Summary: *Characteristic noise temperatures of electrical networks.*
The influence of the noisiness of electrical networks is conventionally described by the noise figure. However, the noise figure is not an independent and physically elementary quantity. This paper aims at the definition of physically elementary noise quantities which do not depend on the signal performance of a network and which describe the noisiness and its effects uniquely.

The intensity of the noise of a passive multiport at a uniform temperature is determined by the absolute value of the temperature, while the distribution of the noise over the ports is described by the noise distribution matrix. The latter depends exclusively on the signal properties of the multiport.

To describe the noisiness of a general multiport, which is neither passive nor at a uniform temperature, a product of two matrices is introduced. One matrix is again the noise distribution matrix, while the other is called the noise temperature matrix.

Network- and co-ordinate transformations are discussed next. The 'eigenvalues' of the noise temperature matrix are invariant under these transformations. They are called the characteristic noise temperatures of the multiport. They are the physically elementary quantities sought for. Their meaning and significance are discussed.



1. Inleiding

De afzonderlijke onderdelen in een telecommunicatienetwerk voegen ruisenergie toe aan de signaaloverdragende kanalen. Hierdoor wordt de verhouding tussen het nuttige signaalvermogen en het hinderlijke ruisvermogen verkleind. Voor een gemakkelijke en betrouwbare overdracht van de in het signaal vervatte informatie is het echter gewenst, dat die verhouding zo groot mogelijk is. Op twee manieren kan aan het hinderlijke ruisverschijnsel het hoofd worden geboden:

In de eerste plaats kan met behulp van ingewikkelde modulatie- en detectietechnieken ook aan relatief zwakke signalen de gewenste informatie min of meer betrouwbaar worden onttrokken; in de tweede plaats kan worden geprobeerd, het totale ruisniveau zo laag mogelijk te houden door gebruik te maken van ruisarme componenten. Naast kennis van signaalbewerkingsmethoden moet de ontwerper van telecommunicatienetwerken overzicht hebben over de beschikbare componenten en hun eigenschappen. Behalve van zulke eigenschappen als specifieke werking, bandbreedte en dynamiek moet hem bekend zijn in welke mate de componenten bijdragen aan het ruisvermogen in het gehele systeem.

Voor het laatste is nodig, dat voor iedere component de ruisbijdrage kwantitatief kan worden aangegeven; het is gebruikelijk dit met het ruisgetal F te doen [1, 2]. Deze grootheid is gedefinieerd als de verhouding van het signaal- en ruisvermogen aan de ingang, gedeeld door die verhouding aan de uitgang.[1]) Een grote waarde van F houdt in dat de verhouding van het signaal- en ruisvermogen bij doorgang door de betrokken component aanzienlijk afneemt en dus slechter wordt. Heeft F de waarde één, dan vindt er in het geheel geen degradatie plaats; de component geeft geen ruisvermogen af. In het algemeen zal ernaar worden gestreefd, componenten te verkrijgen waarvan F klein is, zo dicht mogelijk bij één ligt. In de literatuur wordt verder uitvoerig beschreven hoe het ruisgetal wordt gemeten en gehanteerd [3]. Wij zullen ons daar verder niet mee bezighouden.

Het begrip ruisgetal heeft naar onze mening een aantal tekortkomingen.

Dit artikel werd door de auteur opgedragen aan *prof. dr. ir. J. P. Schouten* bij diens afscheid als gewoon hoogleraar in de Afdeling der Elektrotechniek van de T.H. Delft. In verband met de grote lengte van het artikel kon dit niet worden opgenomen in het 'Liber Amicorum', dat verschenen is in 'De Ingenieur' 1970, nr. 5, van 30 januari 1970, blz. ET 1 ... 28.

[1]) Een andere, eveneens veelvuldig gebruikte, grootheid is de equivalente ingangstemperatuur. Daar deze grootheid direct te herleiden is tot het ruisgetal en aan dezelfde beperkingen onderhevig is, kan bespreking ervan hier achterwege blijven.

F is niet een onafhankelijke grootheid.

Het ruisgetal van een netwerk wordt niet alleen en uitsluitend door dat netwerk bepaald, maar hangt ook af van de omgeving waarin dat netwerk is geplaatst. Voor meting en gebruik is het van belang welke impedanties op de ingang en de uitgang van het netwerk zijn aangesloten en hoeveel ruisvermogen die impedanties afgeven. Er wordt gepoogd aan dit bezwaar te ontkomen door zowel die impedanties als hun ruisvermogen te standaardiseren. Veelal lijkt de werkelijke omgeving echter niet op de gestandaardiseerde; vooral bij de moderne gecompliceerde systemen – waarin afzonderlijke componenten, zoals bijv. een parametrische versterker, in nauwe samenhang met hun omgeving functioneren – is deze methode gebrekkig. Zij leidt ertoe dat men zijn toevlucht neemt tot onpraktische additionele begrippen, zoals bijv. 'uitwisselbaar vermogen' en 'uitwisselbare vermogensversterking'.

F is niet een fysisch elementaire grootheid.

Het begrip ruisgetal is ontstaan vanuit de praktische behoefte, het ruisgedrag van een netwerk in een keten van achter elkaar geschakelde netwerken te karakteriseren. Het ruisgedrag wordt echter niet alleen door het ruisen van zo'n netwerk bepaald maar evenzeer door het signaalgedrag, zoals de versterking en de mate van aanpassing aan de andere netwerken. Het ruisgetal verenigt bijgevolg verschillende aspecten in zich en is zeker niet de uitdrukking van een enkel elementair fysisch aspect, i.c. van het ruisen.

F bepaalt niet de beste volgorde.

Met betrekking tot de ruiseigenschappen zou men verlangen, dat de beste volgorde van componenten in een keten die is, waarbij de component met de kleinste F voorop en die met de grootste achteraan is geplaatst, mits die volgorde zinvol is voor wat de specifieke eigenschappen van de componenten betreft. Zo eenvoudig is het echter niet; de beste plaats met betrekking tot het ruisgedrag hangt niet alleen af van het ruisgetal, maar ook van de andere eigenschappen, zoals versterking of verzwakking. Om aan deze moeilijkheid tegemoet te komen hebben *Haus* en *Adler* een 'noise measure' (M) gedefinieerd [4]:

$$M = (F - 1)(1 - \alpha^{-1})^{-1} \tag{1}$$

waarin α de (uitwisselbare) vermogensversterking is. Voor minimale ruisbijdrage moet de component met de kleinste M vooropgaan en die met de grootste achteraan komen.[2])

F is niet geschikt voor veelpoorten.

Het ruisgetal beschrijft het ruisgedrag van tweepoorten of vierpolen. Aan zulke netwerken kunnen in- en uitgang worden onderscheiden. Dat is niet het geval bij éénpoorten en bij veelpoorten, d.w.z. n-poorten met $n \geqq 3$. Bij de eerstgenoemde (zoals reflectie- of negatieve weerstandsversterkers) kunnen kunstmatig een in- en uitgang worden gedefinieerd of met additionele middelen, zoals een circulator, worden aangebracht. Bij een veelpoort kan worden verondersteld, dat de afsluitingen van een aantal poorten, zoals de lokale oscillator bij een mengtrap of het 'idler'-circuit bij een parametrische versterker, wezenlijk deel uitmaken van de veelpoort, zodanig, dat er nog twee poorten overblijven. Dit zijn echter kunstgrepen en in wezen is het ruisgetal niet toepasselijk op veelpoorten.

Wij willen nu stellen dat, voor een goed begrip en analyse van de invloeden van het ruisen van de componenten van een systeem op dat systeem, er behoefte is aan een elementaire fysische grootheid of aan een aantal grootheden, die het ruisen van een netwerk (voor zover dat naar buiten blijkt) ondubbelzinnig vastleggen. Zulke grootheden moeten niet afhangen van de min of meer toevallige omgeving (d.w.z. de omringende netwerken) en ook niet van de andere eigenschappen van het betrokken netwerk. Het ruisgetal beantwoordt hier niet aan. In de volgende paragrafen laten we zien hoe men zulke grootheden, door ons karakteristieke ruistemperaturen genoemd, kan definiëren. Wij zullen dit slechts doen voor lineaire tijd-onafhankelijke netwerken. Wij moeten ons zeer beperken en gaan daarom stellenderwijs te werk, veel argumentatie en bewijsvoering achterwege latend, die overigens reeds elders zijn gepubliceerd [5].

2. Signaalgedrag

De reactie van een lineaire éénpoort op een signaal kan worden beschreven met:

$$V = ZJ \tag{2}$$

Z is de complexe signaalgedragscoëfficiënt, die in dit geval de impedantie wordt genoemd. V en J zijn de complexe, effectieve amplituden van de spanning over en de stroom in de éénpoort, die respectievelijk als afhankelijke en als onafhankelijke variabele kunnen worden opgevat. Wij noemen J de excitatie en V de responsie.

Het vermogen P dat bij een excitatie J in de éénpoort wordt opgenomen is:

$$P = \tfrac{1}{2}(V^*J + J^*V) \tag{3}$$

waar het symbool * de complex geconjugeerde aangeeft. Substitutie van V met vergelijking (2) levert:

$$P = \tfrac{1}{2}J^*(Z^* + Z)J = J^*P_Z J \tag{4}$$

waarin:

$$P_Z = \tfrac{1}{2}(Z^* + Z) \tag{5}$$

de vermogensabsorptie- of dissipatiefactor is.

Voor passieve éénpoorten is het opgenomen vermogen nooit negatief; er geldt dan:

$$P_Z \geqq 0 \tag{6}$$

en Z heeft een niet-negatief reëel deel. Voor een actieve éénpoort, d.w.z. een negatieve weerstands- of reflectieversterker, is P_Z, en dus ook het reële deel van Z, wel negatief.[3]) Is $P_Z = 0$, dan is de éénpoort reactief; er wordt dan noch vermogen opgenomen, noch afgegeven.

Laat V_i en J_i de spanning over en de stroom in de $i$de poort van een n-poort zijn. We definiëren nu spannings- en stroomvectoren als de n-dimensionale kolomvectoren:

---

[2]) *Haus* en *Adler* beschouwen slechts 'echte' versterkers met $\alpha > 1$. Voor verzwakkende componenten met $\alpha < 1$ is M negatief en kan het criterium niet worden gehanteerd in de hier vermelde eenvoudige vorm.

[3]) We zullen ons niet met bronnen bezighouden. Een bron is een actief netwerk, dat spontaan een signaal uitzendt. Een bron kan worden beschreven door aan het rechterlid van vergelijking (2) een e.m.k. E toe te voegen: $V = ZI + E$. Het reële deel van Z kan dan nog zowel positief als negatief zijn.

$$\bar{V} = \begin{vmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{vmatrix}, \quad \bar{J} = \begin{vmatrix} J_1 \\ J_2 \\ \vdots \\ J_n \end{vmatrix} \tag{7}$$

Het verband tussen de excitatie $\bar{J}$ en de responsie $\bar{V}$ wordt vastgelegd door de vergelijking:

$$\bar{V} = \bar{Z}\bar{J} \tag{8}$$

De $n \times n$-matrix $\bar{Z}$ is de signaalgedragsmatrix, in dit geval de impedantiematrix.

Het in de n-poort opgenomen vermogen P is:

$$P = \tfrac{1}{2}(\bar{V}^+\bar{J} + \bar{J}^+\bar{V}) \tag{9}$$

waarin het symbool $^+$ de geadjugeerde aangeeft.[4]) Substitutie van $\bar{V}$ met vergelijking (8) levert:

$$P = \tfrac{1}{2}\bar{J}^+(\bar{Z}^+ + \bar{Z})\bar{J} = \bar{J}^+\bar{P}_Z\bar{J} \tag{10}$$

waarin de *Hermitische* matrix [5]):

$$\bar{P}_Z = \tfrac{1}{2}(\bar{Z}^+ + \bar{Z}) \tag{11}$$

de vermogensabsorptie- of dissipatiematrix is. Is de n-poort passief, dan is $\bar{P}_Z$ positief semi-definiet.[6]) Een negatief definiete matrix $\bar{P}_Z$ betekent een volledig actieve n-poort. Voor $\bar{P}_Z = \bar{O}$, of $\bar{Z}^+ = -\bar{Z}$, is de n-poort reactief; $\bar{O}$ is de nul-matrix. In het algemene geval kan, afhankelijk van $\bar{J}$, het geabsorbeerde vermogen P zowel positief als negatief zijn. De n-poort bevat dan passieve zowel als actieve delen.

3. Het ruisen van éénpoorten

Een passief netwerk, aangesloten op andere netwerken, straalt fluctuerend ruisvermogen uit in die netwerken. We beschouwen slechts stationaire systemen. Het over zekere tijd gemiddelde ruisvermogen, dat vervat is in een bandbreedte Δf, is voor zulke systemen op verschillende tijden hetzelfde. We gaan ervan uit, dat slechts over de tijd gemiddelde vermogens meetbaar zijn.

Het ruisvermogen, dat door een éénpoort wordt uitgestraald, kan worden bepaald door in serie geschakeld met de 'ruisvrije' éénpoort als een ruisspanningsbron te worden gedacht; dit is geïllustreerd in fig. 1. In plaats van vergelijking (2) hebben we:

$$V = ZJ + E \tag{12}$$

De fluctuerende e.m.k. E is niet bekend, maar wel het gemiddelde amplitudekwadraat $\overline{EE^*}$. Met vergelijking (12) zijn nu de fluctuerende ruisstromen in de aangesloten netwerken te bepalen en vervolgens, met $\overline{EE^*}$, ook hun gemiddelde amplitudekwadraten.

Als de éénpoort een 'echte' weerstand R is, zal het ruisvermogen uitsluitend van thermische oorsprong zijn. Heeft R verder een uniforme (absolute) temperatuur T, dan geldt[7]):

[4]) De geadjugeerde wordt verkregen door spiegeling en complexe conjugatie. Een kolom-vector V_i wordt de rij-vector V_i^* en een matrix M_{ij} wordt de matrix M^*_{ji}.

[5]) Een matrix $\bar{M}$ is *Hermitisch* als zij gelijk is aan haar geadjugeerde: $\bar{M}^+ = \bar{M}$.

[6]) Een matrix $\bar{M}$ is positief semi-definiet, als voor iedere willekeurige vector $\bar{U}$ geldt: $\bar{U}^+\bar{M}\bar{U} \geqq 0$.

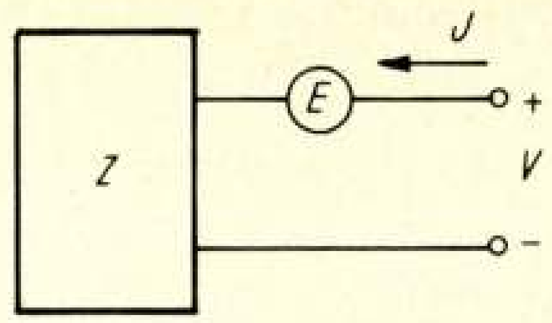


Fig. 1. Een ruisende éénpoort gedraagt zich als een ruisvrije éénpoort met een ruisspanningsbron in serie.

$$\overline{EE^*} = 4kTR\Delta f \tag{13}$$

waarin k de constante van *Boltzmann* is.

Is een passieve éénpoort van uniforme temperatuur niet een 'echte' weerstand R, maar bevat hij tevens reactieve elementen, dan is zijn impedantie Z niet reëel, maar complex. Voor vergelijking (13) kan dan worden geschreven:

$$\overline{EE^*} = 2kT(Z + Z^*)\Delta f = kTN_Z\Delta f \tag{14}$$

waarin:

$$N_Z = 2(Z + Z^*) \tag{15}$$

de ruisverdelingsfactor wordt genoemd. Waarom wij naast P_Z, zie vergelijking (11), ook nog N_Z invoeren, zal eerst later duidelijk worden. Evenals P_Z is ook N_Z voor een passieve éénpoort niet-negatief.

Heeft een passieve éénpoort Z niet een uniforme temperatuur, dan kan er niet een eenvoudige uitdrukking voor $\overline{EE^*}$ worden afgeleid. Schrijven we, in analogie met vergelijking (14), nu toch formeel:

$$\overline{EE^*} = kT_ZN_Z\Delta f \tag{16}$$

dan moeten we een fictieve temperatuur T_Z invoeren. Om redenen, die later zullen blijken, noemen we T_Z de karakteristieke ruistemperatuur. Daar $\overline{EE^*}$ niet negatief is, is voor een passieve éénpoort T_Z niet negatief.

Het juist ingevoerde formalisme kan zodanig worden uitgebreid, dat ook actieve éénpoorten worden omvat. Voor zulke éénpoorten is N_Z, evenals P_Z, negatief. Aangezien $\overline{EE^*}$ uiteraard niet negatief is, moet T_Z niet positief zijn. Dit is niet zo erg bevreemdend als bedacht wordt, dat het begrip 'negatieve temperatuur' ook wordt gehanteerd bij versterkers en bronnen, die berusten op gestimuleerde emissie, zoals masers en lasers, waar ze de inverse bezettingstoestand aangeeft van de energieniveaus waartussen de gestimuleerde overgangen plaatsvinden.[8])

[7]) Vergelijking (13) voor thermische ruis geldt slechts in zoverre als de equipartitiewet van toepassing is op de thermische beweging van de ladingsdragers, i.c. de elektronen, in de weerstand. Voor zeer hoge frequenties is dat niet meer het geval en moet de formule van *Planck* worden toegepast. I.p.v. vergelijking (13) geldt dan:

$$\overline{EE^*} = \frac{4\,hf\,R\,\Delta f}{\exp(hf/kT) - 1}$$

waarin h de constante van *Planck* is. In vergelijking (13) is $\overline{EE^*}$ onafhankelijk van de frequentie f; men spreekt dan van witte ruis. In het algemeen is dat niet zo, maar hangen de ruisvermogens in Δf wel degelijk van f af.

[8]) Voor een ideale maser-versterker kan worden aangetoond, dat de beide negatieve temperaturen identiek zijn. We noemen een maser ideaal, als hij naast het actieve element geen dissipatieve delen bevat. De ruis is dan alleen afkomstig van de spontane overgangen van het hoge naar het lage energieniveau en niet van thermische straling van dissipatieve delen [6].

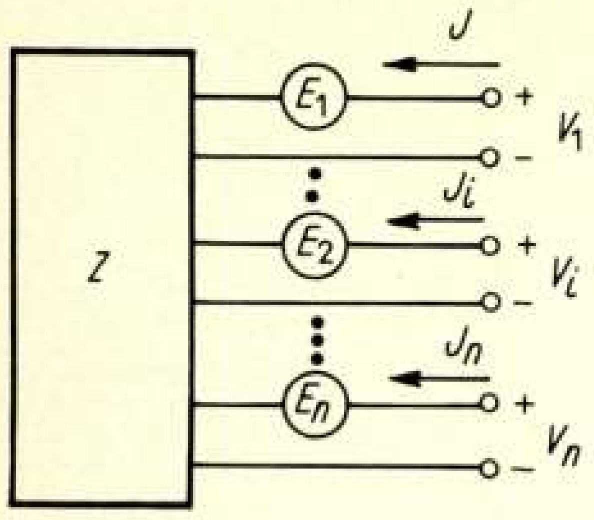


Fig. 2. Een ruisende n-poort is equivalent aan een ruisvrije n-poort met n gecorreleerde ruisspanningsbronnen successievelijk in serie met de n-poorten.

4. Ruisspanning-vermogensmatrix

Op analoge wijze als een éénpoort kan een ruisende n-poort worden vervangen door aan iedere poort van een 'ruisvrije' n-poort een ruisspanningsbron toe te voegen, zoals is aangegeven in fig. 2. De e.m.k.'s E_i vormen de componenten van een ruisspanningsvector:

$$\overline{E} = \begin{vmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ E_n \end{vmatrix} \tag{17}$$

I.p.v. vergelijking (8) wordt de ruisende n-poort beschreven door:

$$\overline{V} = \overline{Z}\overline{J} + \overline{E} \tag{18}$$

Uiteraard zijn de fluctuerende e.m.k.'s E_i niet bekend, maar wel hun gemiddelde amplitudekwadraten $\overline{E_iE_i^*}$. Deze kennis is echter nog niet voldoende, daar de ruisspanningsbronnen in het algemeen onderling gecorreleerd zijn. De correlatie wordt vastgelegd door de complexe gemiddelde kruisprodukten $\overline{E_iE_j^*}$, waarbij:

$$\overline{E_jE_i^*} = \overline{(E_iE_j^*)^*} \tag{19}$$

De ruisspanning-vermogensmatrix $\overline{G}_Z$ wordt nu zodanig gedefinieerd, dat:

$$G_{ij} = \overline{E_iE_j^*} \tag{20}$$

Uit vergelijking (19) volgt dan, dat $\overline{G}_Z$ een *Hermitische* matrix is:

$$\overline{G}_Z^{\,+} = \overline{G}_Z \tag{21}$$

Uit de definitie – vergelijking (20) – volgt verder, dat $\overline{G}_Z$ kan worden geschreven als het gemiddelde formele dyadische vectorprodukt:

$$\overline{G}_Z = \overline{\overline{E}\overline{E}^+} \tag{22}$$

Indien op $\overline{Z}$ een ruisvrije n-poort $\overline{Q}$ is aangesloten, zoals is aangegeven in fig. 3, dan zijn de ruisstromen in de verschillende verbindingen gegeven door[9]):

$$\overline{J} = -(\overline{Z} + \overline{Q})^{-1}\overline{E} \tag{23}$$

[9]) Als de matrix $(\overline{Z} + \overline{Q})$ singulier is, en $(\overline{Z} + \overline{Q})^{-1}$ niet bestaat, treden er in het systeem $\overline{Z}, \overline{Q}$ resonanties op. We zullen deze gevallen hier buiten beschouwing laten.

De ruisstroom-vermogensmatrix is:

$$\overline{\overline{J}\overline{J}^+} = (\overline{Z} + \overline{Q})^{-1}\overline{\overline{E}\overline{E}^+}(\overline{Z}^+ + \overline{Q}^+)^{-1} = \\ = (\overline{Z} + \overline{Q})^{-1}\overline{G}_Z(\overline{Z}^+ + \overline{Q}^+)^{-1} \tag{24}$$

Als $\overline{U}_i$ de *i*de rij-vector van $(\overline{Z} + \overline{Q})^{-1}$ is, dan is het *i*de diagonale element gegeven door:

$$\overline{J_iJ_i^*} = \overline{U}_i\overline{G}_Z\overline{U}_i^{\,+} \tag{25}$$

Deze mag voor geen enkele $\overline{Q}$, d.w.z. voor geen enkele $\overline{U}_i$, negatief zijn. De voorwaarde:

$$\overline{U}_i\overline{G}_Z\overline{U}_i^{\,+} \geqq 0 \tag{26}$$

voor alle $\overline{U}_i$ is de definitie dat $\overline{G}_Z$ een positief semi-definiete matrix is.

De matrixtransformatie van vergelijking (24), die $\overline{G}_Z$ transformeert in $\overline{\overline{J}\overline{J}^+}$, is een *Hermitische* congruentietransformatie. Het definiete karakter van een matrix is invariant onder zulke transformaties; de matrix $\overline{\overline{J}\overline{J}^+}$ is dus ook positief semi-definiet.

5. Het ruisen van passieve veelpoorten

Laat een n-poort zijn samengesteld uit n niet met elkaar gekoppelde, onafhankelijke éénpoorten Z_i, met alle dezelfde temperatuur T; zo'n n-poort wordt een diagonale n-poort genoemd. De impedantiematrix $\overline{Z}$ is diagonaal:

$$\overline{Z} = \begin{vmatrix} Z_1 & & & \\ & Z_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & Z_n \end{vmatrix} \tag{27}$$

Voor de *i*de ruisspanningsbron E_i geldt:

$$\overline{E_iE_i^*} = kT\,2(Z_i + Z_i^*)\Delta f \tag{28}$$

Wegens de onderlinge onafhankelijkheid van de Z_i's zijn de E_i's onderling niet gecorreleerd; zodoende geldt:

$$\overline{E_iE_j^*} = 0; \quad i \neq j \tag{29}$$

De ruisspanning-vermogensmatrix is dus ook diagonaal. Zij is gegeven door:

$$\overline{G}_Z = k\overline{T}2(\overline{Z} + \overline{Z}^+)\Delta f = \mathrm{k}T\overline{N}_Z\Delta f \tag{30}$$

waar, in analogie met vergelijking (15):

$$\overline{N}_Z = 2(\overline{Z} + \overline{Z}^+) \tag{31}$$

de ruisverdelingsmatrix is.

Door *Twiss* is afgeleid, dat de vergelijkingen (30) en (31) ook van toepassing zijn op een algemene passieve ruisende n-poort $\overline{Z}$ met de uniforme temperatuur T [7]. Sluiten we zo'n algemene

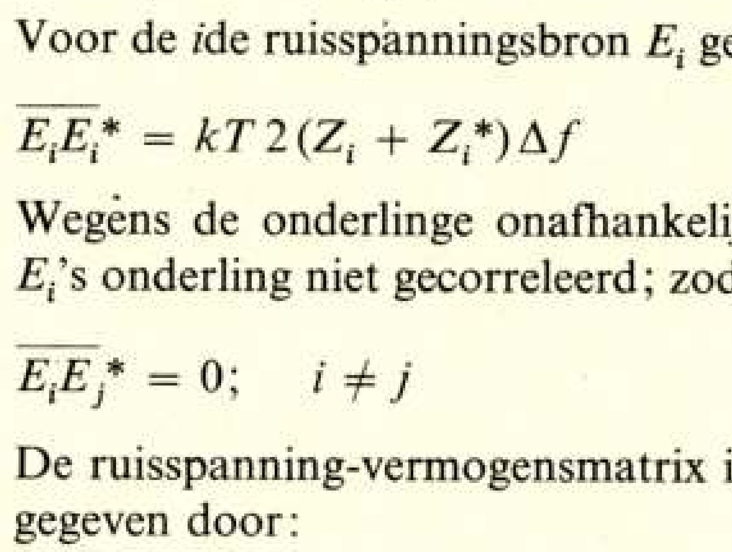


Fig. 3. De algemene belasting van een ruisende n-poort $\overline{Z}$ is een n-poort $\overline{Q}$.

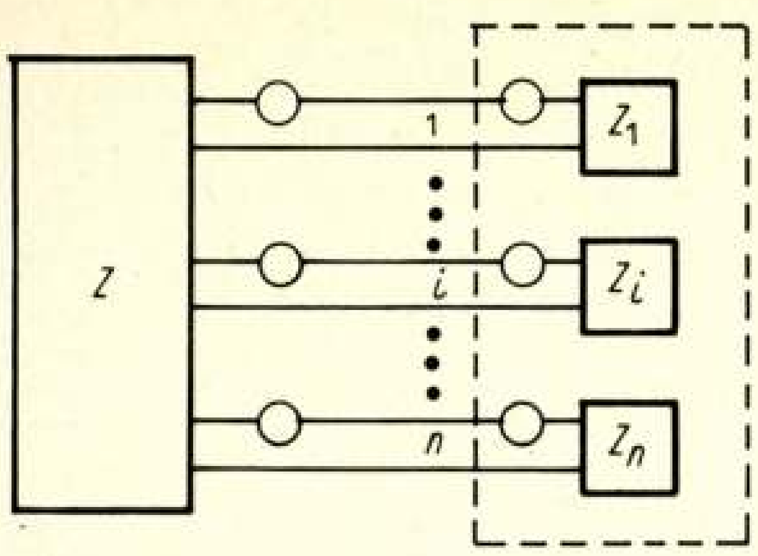


Fig. 4. Een diagonale belasting van de n-poort $\overline{Z}$ bestaat uit n afzonderlijke éénpoorten Z_i. Als alle netwerken passief zijn en dezelfde temperatuur hebben, is er per verbindingslijn evenwicht in de ruisvermogensuitwisseling.

n-poort aan op een diagonale n-poort met dezelfde temperatuur (zie fig. 4), dan zal er thermisch evenwicht zijn. Door de afzonderlijke verbindingen is er dan, netto, geen ruisenergieoverdracht; dat is het geval voor alle mogelijke diagonale belastingen van $\overline{Z}$. Door nu voor alle afzonderlijke éénpoorten op één na open verbindingen te nemen en daarna op twee na, en dit achtereenvolgens te doen voor alle poorten, kunnen de vergelijkingen (30) en (31) worden afgeleid.[10])

Indien twee algemene passieve n-poorten $\overline{Z}$ en $\overline{Q}$ met respectievelijk temperaturen T_Z en T_Q en ruisspanningsvectoren $\overline{E}_Z$ en $\overline{E}_Q$ met elkaar zijn verbonden, zoals is weergegeven in fig. 5, krijgen we voor de ruisstromen door de verbindingen:

$$\overline{J} = (\overline{Z} + \overline{Q})^{-1}\,(\overline{E}_Q - \overline{E}_Z) \qquad (32)$$

Als $\overline{Z}$ en $\overline{Q}$ onafhankelijk zijn, zijn hun ruisspanningsbronnen wederzijds niet gecorreleerd:

$$\overline{\overline{E}_Z\overline{E}_Q{}^{+}} = \overline{Q} \qquad (33)$$

Uit vergelijking (30) volgt dan voor de ruisstroom-vermogensmatrix:

$$\overline{\overline{J}\overline{J}^{+}} = (\overline{Z} + \overline{Q})^{-1}\,(\overline{G}_Q - \overline{G}_Z)\,(\overline{Z}^{+} + \overline{Q}^{+})^{-1}$$
$$= k(\overline{Z} + \overline{Q})^{-1}\,[(\overline{Q} + \overline{Q}^{+})\,\overline{T}_Q - (\overline{Z} + \overline{Z}^{+})\overline{T}_Z] \cdot$$
$$\cdot\,(\overline{Z}^{+} + \overline{Q}^{+})^{-1}\Delta f \qquad (34)$$

Met dit resultaat kan de ruisvermogensuitwisseling in detail worden uitgerekend. De eisen, die gesteld worden door de wetten van de thermodynamica (zoals bijv. dat netto energieoverdracht altijd plaatsvindt van de warmere n-poort naar de koudere) kunnen gemakkelijk worden geverifieerd. Hier ontbreekt de ruimte om deze zaken gedetailleerd te bespreken.

6. De ruistemperatuur-matrix

Met het resultaat van de vorige paragraaf, vervat in de vergelijkingen (30) en (31), is er voor het ruisen van een n-poort een fraaie scheiding verkregen tussen de ruisintensiteit enerzijds en de signaaloverdrachtseigenschappen anderzijds. De intensiteit wordt gegeven door de uniforme absolute temperatuur T, terwijl de overdrachtsaspecten worden vastgelegd door de ruisverdelingsmatrix $\overline{N}_Z$. Helaas zijn de vergelijkingen (30) en (31) niet van toepassing op passieve n-poorten, die niet een uniforme temperatuur hebben en zeker niet op n-poorten, die actief zijn of actieve delen bevatten, d.w.z. n-poorten waarvan $\overline{P}_Z$ en $\overline{N}_Z$ negatief definiet of althans niet positief definiet zijn. In paragraaf **3.** kon voor algemene ruisende éénpoorten – ook voor actieve – nog formeel een fictieve temperatuur (de karakteristieke ruistemperatuur) worden ingevoerd. Ook dat is echter voor n-poorten in het algemeen niet mogelijk.

Om het fraaie resultaat van de vergelijkingen (30) en (31) toch algemeen toepasselijk te laten zijn, voeren we het begrip ruistemperatuur-matrix in. Van iedere willekeurige ruisende n-poort $\overline{Z}$ zijn in principe de matrices $\overline{G}_Z$ en $\overline{N}_Z$ bekend. De ruistemperatuur-matrix $\overline{T}_Z$ wordt nu zo gedefinieerd dat, in analogie met vergelijking (30), geldt:

$$\overline{G}_Z = k\,\overline{T}_Z\,\overline{N}_Z\,\Delta f \qquad (35a)$$

De definitie van $\overline{T}_Z$ luidt:

$$\overline{T}_Z = k^{-1}\,\overline{G}_Z\,\overline{N}_Z{}^{-1}\,\Delta f^{-1} \qquad (35b)$$

Voor n-poorten met singuliere $\overline{N}_Z$ is deze definitie niet toe te passen; met subtielere methoden is ook dan toch altijd een ruistemperatuur-matrix te definiëren (zie paragraaf **9**).

De introductie van $\overline{T}_Z$ moge in dit stadium nog weinig zinvol lijken. In het algemeen is $\overline{T}_Z$ niet onafhankelijk van de signaaloverdrachtseigenschappen van $\overline{Z}$; zij is zeker ook niet een elementair-fysische grootheid. De elementen van $\overline{T}_Z$, die zelfs veelal complex zijn, zijn ook niet te interpreteren als fysische grootheden, i.c. temperaturen. Wij zullen hierna echter zien, dat de eigenwaarden van $\overline{T}_Z$ invariant zijn onder transformaties en dat die eigenwaarden reële getallen zijn. Deze eigenwaarden, die de intensiteit van het ruisen onafhankelijk van het signaalgedrag vastleggen, zijn de gezochte elementaire fysische grootheden. Zij zijn op te vatten als kenmerkende ruistemperaturen van de n-poort; zij worden de karakteristieke ruistemperaturen genoemd.

Voor een éénpoort is de matrix $\overline{T}_Z$ een scalar en gelijk aan haar eigenwaarde T_Z; hiermee is het in paragraaf **3** t.a.v. T_Z gestelde duidelijk.

7. Transformaties

7.1. Netwerktransformaties

Wordt een n-poort $\overline{Z}$ aangesloten op n poorten van een $2n$-poort, dan vormen de andere n poorten van die $2n$-poort een nieuwe n-poort $\overline{Z}'$; dit is geïllustreerd in fig. 6. De $2n$-poort

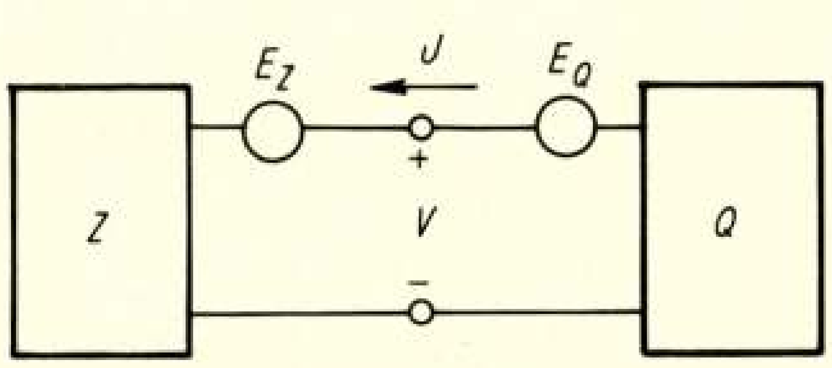


Fig. 5. De ruisvermogensuitwisseling tussen twee n-poorten $\overline{Z}$ en $\overline{Q}$ kan berekend worden met de beide ruisspanningsbron-vectoren $\overline{E}_Z$ en $\overline{E}_Q$.

[10]) Dit resultaat kan m.b.v. matrix-algebra meer algemeen en op elegantere wijze worden verkregen [5].

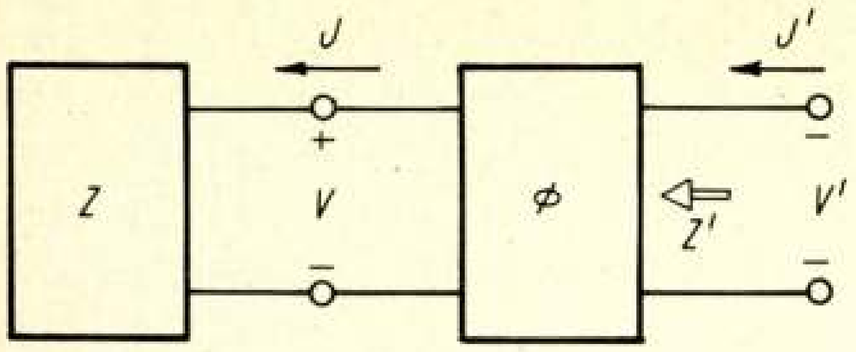


Fig. 6. Een verliesvrije $2n$-poort $\bar{\Phi}$ transformeert een n-poort $\bar{Z}$ naar een n-poort $\bar{Z}'$; algemene transformator.

kan worden beschreven met één van twee, elkaars inverse, vergelijkingen:

$$\begin{pmatrix} \bar{V}' \\ \bar{J}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\Phi}_{11} & \bar{\Phi}_{12} \\ \bar{\Phi}_{21} & \bar{\Phi}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{V} \\ \bar{J} \end{pmatrix} = \bar{\Phi} \begin{pmatrix} \bar{V} \\ \bar{J} \end{pmatrix} \tag{36a}$$

$$\begin{matrix} \bar{V} \\ \bar{J} \end{matrix} = \begin{pmatrix} \bar{\Psi}_{11} & \bar{\Psi}_{12} \\ \bar{\Psi}_{21} & \bar{\Psi}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{V}' \\ \bar{J}' \end{pmatrix} = \bar{\Psi} \begin{pmatrix} \bar{V}' \\ \bar{J}' \end{pmatrix} \tag{36b}$$

We interesseren ons verder slechts voor verliesvrije $2n$-poorten; de beide stellen sub-matrices $\bar{\Phi}_{ij}$ en $\bar{\Psi}_{ij}$ voldoen dan aan vergelijkingen van de vorm:

$$\left.\begin{aligned} &\bar{\Phi}_{11}^+ \bar{\Phi}_{22} + \bar{\Phi}_{21}^+ \bar{\Phi}_{12} = \bar{I} \\ &\bar{\Phi}_{11}^+ \bar{\Phi}_{21} + \bar{\Phi}_{21}^+ \bar{\Phi}_{11} = \bar{\Phi}_{22}^+ \bar{\Phi}_{12} + \bar{\Phi}_{12}^+ \bar{\Phi}_{22} = \bar{O} \end{aligned}\right\} \tag{37a}$$

waarin $\bar{I}$ de eenheidsmatrix en $\bar{O}$ de nulmatrix is. M.b.v. matrixalgebra is uit deze vergelijkingen af te leiden, dat dan ook de duale vergelijkingen geldig zijn [5]. Deze zijn van de vorm:

$$\left.\begin{aligned} &\bar{\Psi}_{11}^+ \bar{\Psi}_{22} + \bar{\Psi}_{12}^+ \bar{\Psi}_{21} = \bar{I} \\ &\bar{\Psi}_{11}^+ \bar{\Psi}_{12} + \bar{\Psi}_{12}^+ \bar{\Psi}_{11} = \bar{\Psi}_{22}^+ \bar{\Psi}_{21} + \bar{\Psi}_{21}^+ \bar{\Psi}_{22} = \bar{O} \end{aligned}\right\} \tag{37b}$$

Een $2n$-poort met deze eigenschappen noemen we een algemene transformator.[11])

De n-poort $\bar{Z}'$ is de getransformeerde van de n-poort $\bar{Z}$. I.p.v. vergelijking (18) geldt voor de getransformeerde n-poort:

$$\bar{V}' = \bar{Z}'\bar{J}' + \bar{E}' \tag{38}$$

Substitutie van vergelijking (18) in vergelijking (36) geeft [12]):

$$\bar{Z}' = (\bar{\Phi}_{11}\bar{Z} + \bar{\Phi}_{12})(\bar{\Phi}_{21}\bar{Z} + \bar{\Phi}_{22})^{-1} \tag{39a}$$

$$\bar{Z}' = -(\bar{\Psi}_{11} - \bar{Z}\bar{\Psi}_{21})^{-1}(\bar{\Psi}_{12} - \bar{Z}\bar{\Psi}_{22}) \tag{39b}$$

en:

$$\bar{E}' = (\bar{\Psi}_{11} - \bar{Z}\bar{\Psi}_{21})^{-1}\bar{E} \tag{40}$$

Voor het vermogen, dat in een netwerk wordt opgenomen, behoeft geen rekening te worden gehouden met het eigen ruisen. Bij veronachtzaming van dat eigen ruisen volgt verder uit vergelijking (36a):

$$\bar{J}' = (\bar{\Phi}_{21}\bar{Z} + \bar{\Phi}_{22})\bar{J} = \bar{\Lambda}^{-1}\bar{J} \tag{41}$$

Daar $\bar{J}$ de excitatievector is, noemen we:

$$\bar{\Lambda} = (\bar{\Phi}_{21}\bar{Z} + \bar{\Phi}_{22})^{-1} \tag{42}$$

de excitatie-transformatiematrix. Wegens de verliesvrijheid van de $2n$-poort is het in $\bar{Z}'$ opgenomen vermogen gelijk aan het vermogen, dat in $\bar{Z}$ wordt gedissipeerd. Met vergelijking (10) vinden we:

$$\bar{P} = \bar{J}^+ \bar{P}_Z \bar{J} = \bar{J}'^+ \bar{\Lambda}^+ \bar{P}_Z \bar{\Lambda} \bar{J}' = \bar{J}'^+ \bar{P}_{Z'} \bar{J}' \tag{43}$$

Hieruit volgt voor de dissipatie-matrix $\bar{P}_{Z'}$ van $\bar{Z}'$:

$$\bar{P}_{Z'} = \bar{\Lambda}^+ \bar{P}_Z \bar{\Lambda} \tag{44}$$

Dit is een *Hermitische* congruentietransformatie. Substitutie van vergelijking (39a) in de definitie van $\bar{P}_{Z'}$ volgens vergelijking (11) geeft met de conditie van vergelijking (37a) uiteraard hetzelfde resultaat.

Vergelijking van vergelijking (40) met vergelijking (41) suggereert om, in analogie met vergelijking (42), een ruistransformatie-matrix $\bar{\Gamma}$ in te voeren volgens:

$$\bar{\Gamma} = (\bar{\Psi}_{11} - \bar{Z}\bar{\Psi}_{21})^{-1} \tag{45}$$

Er geldt dan:

$$\bar{E}' = \bar{\Gamma}\bar{E} \tag{46}$$

en met vergelijking (22):

$$\bar{G}_{Z'} = \overline{\bar{E}'\bar{E}'^+} = \bar{\Gamma}\,\overline{\bar{E}\bar{E}^+}\,\bar{\Gamma}^+ = \bar{\Gamma}\bar{G}_Z\bar{\Gamma}^+ \tag{47}$$

Deze *Hermitische* congruentietransformatie laat het positief semi-definiete karakter van $\bar{G}_Z$ invariant.

Met de vergelijkingen (37b) en (39b) volgt uit de definities van $\bar{N}_Z$ en $\bar{N}_{Z'}$ volgens vergelijking (31), dat ook de ruisverdelings-matrix *Hermitisch* congruent wordt getransformeerd:

$$\bar{N}_{Z'} = \bar{\Gamma}\bar{N}_Z\bar{\Gamma}^+ \tag{48}$$

De beide *Hermitische* congruentietransformaties van de vergelijkingen (44) en (48) laten de aantallen positieve, negatieve en nul zijnde eigenwaarden van $\bar{N}_Z$ en $\bar{P}_Z$ onveranderd. Deze aantallen, respectievelijk de index of positiviteit p, de negativiteit q en het defect d, zijn verder voor $\bar{N}_Z$ en $\bar{P}_Z$ dezelfde. Zij zijn constanten van de n-poort en geven de mate van, respectievelijk, de dissipativiteit, de activiteit en de reactiviteit van het netwerk aan. Hun som is gelijk aan het aantal poorten:

$$n = p + q + d \tag{49}$$

Substitutie van de vergelijkingen (47) en (48) in de definitie van $\bar{T}_{Z'}$ volgens vergelijking (35) levert:

$$\begin{aligned} \bar{T}_{Z'} &= k^{-1}\bar{G}_{Z'}\bar{N}_{Z'}^{-1}\Delta f^{-1} = k^{-1}\bar{\Gamma}\bar{G}_Z\bar{\Gamma}^+(\bar{\Gamma}^+)^{-1}\bar{N}_Z^{-1}\bar{\Gamma}^{-1}\Delta f^{-1} \\ &= \bar{\Gamma}(k^{-1}\bar{G}_Z\bar{N}_Z^{-1}\Delta f^{-1})\bar{\Gamma}^{-1} = \bar{\Gamma}\bar{T}_Z\bar{\Gamma}^{-1} \end{aligned} \tag{50}$$

Deze gelijkvormigheidstransformatie laat de eigenwaarden van $\bar{T}_Z$ onveranderd. Die invariante eigenwaarden (de karakteristieke ruistemperaturen T_1 tot en met T_n) zijn dus constanten van de n-poort. Zoals al eerder is opgemerkt is hiermee de

---

[11]) Als we i.p.v. een $2n$-poort een tweepoort hebben, zijn de submatrices scalaren Φ_{ij} en Ψ_{ij}. Een bijzonder geval doet zich dan voor, indien $\Phi_1 = \Phi_{22} = \Psi_{11} = \Psi_{22} = 0$. Uit vergelijking (37) volgt dan $\Phi_{21}^* = \Phi_{12}^{-1} = \Psi_{21} = (\Psi_{21}^*)^{-1}$. Een tweepoort, die hieraan voldoet, heet een complexe transformator. Zijn Φ_{12}, enz., dan bovendien nog reëel, dan is de tweepoort een gewone ideale transformator met wikkelverhouding Φ_{12}.

[12]) Een transformatie is voor een gegeven $\bar{Z}$ weinig zinvol, als de matrices $(\bar{\Phi}_{21}\bar{Z} + \bar{\Phi}_{22})$ en $(\bar{\Phi}_{11} - \bar{Z}\bar{\Phi}_{21})$ *beide* singulier zijn. Men kan aantonen [5] dat zij tegelijk singulier zijn; het systeem $\bar{Z}$ en algemene transformator hebben dan resonanties. We zullen hier verder geen rekening mee houden.

invoering van de ruistemperatuur-matrix zinvol geworden en zijn van de signaaloverdrachtseigenschappen onafhankelijke grootheden verkregen, die de intensiteit van het ruisen ondubbelzinnig vastleggen.

7.2. Coördinatentransformaties

Tot dusver is het signaalgedrag van netwerken beschreven in termen van de spanningen V over en de stromen J in de poorten. Het is evengoed mogelijk dit te doen in andere variabelen of 'coördinaten'. Beperken we ons tot variabelen, die lineaire combinaties van de $\bar{V}$'s en de $\bar{J}$'s zijn, dan vormt voor een n-poort ieder stel van $2n$ lineair onafhankelijke combinaties van de n $\bar{V}$'s en de n $\bar{J}$'s een coördinatensysteem of signaalrepresentatie. Uit de $2n$ variabelen zijn er dan n als onafhankelijke (d.w.z. de excitatie) en de n andere als afhankelijke (d.w.z. de responsie) te kiezen. Een voorbeeld hiervan hebben we reeds bij de hand gehad waar in vergelijking (36a) de variabelen $\bar{V}$ en $\bar{J}$ samen de excitatie en de variabelen $\bar{V}'$ en $\bar{J}'$ samen de responsie vormen.

Indien voor een n-poort de kolomvectoren $\bar{K}$ en $\bar{L}$ de nieuwe excitatie- en responsievectoren zijn, dan kunnen zij uit $\bar{J}$ en $\bar{V}$ worden bepaald met een lineaire coördinatentransformatie:

$$\begin{pmatrix} \bar{L} \\ \bar{K} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\Phi}_{11} & \bar{\Phi}_{12} \\ \bar{\Phi}_{21} & \bar{\Phi}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{V} \\ \bar{J} \end{pmatrix} = \bar{\Phi} \begin{pmatrix} \bar{V} \\ \bar{J} \end{pmatrix} \tag{51a}$$

$$\begin{pmatrix} \bar{V} \\ \bar{J} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\Psi}_{11} & \bar{\Psi}_{12} \\ \bar{\Psi}_{21} & \bar{\Psi}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{L} \\ \bar{K} \end{pmatrix} = \bar{\Psi} \begin{pmatrix} \bar{L} \\ \bar{K} \end{pmatrix} \tag{51b}$$

Iedere niet-singuliere transformatie $\bar{\Phi}$, met inverse $\bar{\Psi}$, is als coördinatentransformatie toegestaan. Vergelijking van de vergelijkingen (36) en (51) laat zien dat *in abstracto* netwerktransformaties identiek zijn met coördinatentransformaties. Coordinatentransformaties zijn echter niet onderhevig aan restricties als vergelijking (37); zij vormen daarom een uitgebreidere verzameling dan de netwerktransformaties. In feite vormen de laatste een sub-groep van de groep van de coördinatentransformaties.

In ieder coördinatensysteem $(\bar{K}, \bar{L})$ is er voor iedere n-poort een signaalgedragsmatrix $\bar{M}$ en een ruisbronvector $\bar{Y}$, zó, dat i.p.v. door vergelijking (18) het signaal-ruisgedrag wordt beschreven door:

$$\bar{L} = \bar{M}\bar{K} + \bar{Y} \tag{52}$$

De componenten van $\bar{Y}$ zijn geen meetbare grootheden, maar wel hun over de tijd gemiddelde amplitudekwadraten en kruisprodukten. Deze vormen weer de elementen van een ruisvermogensmatrix $\bar{G}_M$, die gegeven is door:

$$\bar{G}_M = \bar{Y}\bar{Y}^+ \tag{53}$$

Voor $\bar{M}$ gelden de betrekkingen (zie vergelijking (39)):

$$\begin{aligned} \bar{M} &= (\bar{\Phi}_{11}\bar{Z} + \bar{\Phi}_{12})(\bar{\Phi}_{21}\bar{Z} + \bar{\Phi}_{22})^{-1} \\ &= -(\bar{\Psi}_{11} - \bar{Z}\bar{\Psi}_{21})^{-1}(\bar{\Psi}_{12} - \bar{Z}\bar{\Psi}_{22}) \end{aligned} \tag{54}$$

en ook de inverse relaties:

$$\begin{aligned} \bar{Z} &= (\bar{\Psi}_{11}\bar{M} + \bar{\Psi}_{12})(\bar{\Psi}_{21}\bar{M} + \bar{\Psi}_{22})^{-1} \\ &= -(\bar{\Phi}_{11} - \bar{M}\bar{\Phi}_{21})^{-1}(\bar{\Phi}_{12} - \bar{M}\bar{\Phi}_{22}) \end{aligned} \tag{55}$$

Verder kunnen, in analogie met de vergelijkingen (42) en (45), de excitatie- en ruistransformatie-matrices $\bar{\Lambda}$ en $\bar{\Gamma}$ worden ingevoerd. [13])

$$\bar{\Lambda} = (\bar{\Phi}_{21}\bar{Z} + \bar{\Phi}_{22})^{-1} = (\bar{\Psi}_{21}\bar{M} + \bar{\Psi}_{22}) \tag{56}$$

$$\bar{\Gamma} = (\bar{\Psi}_{11} - \bar{Z}\bar{\Psi}_{21})^{-1} = (\bar{\Phi}_{11} - \bar{M}\bar{\Phi}_{21}) \tag{57}$$

Er gelden dan (zie vergelijkingen (41) en (46)):

$$\bar{K} = \bar{\Lambda}^{-1}\bar{J} \tag{58}$$

$$\bar{Y} = \bar{\Gamma}\bar{E} \tag{59}$$

Nemen we de transformatie van de impedantiematrix-representatie naar de verstrooiingsmatrix-representatie als voorbeeld, dan worden, indien de golfimpedanties van de toevoerleidingen op één worden genormeerd, de transformatie-matrices gegeven door:

$$\bar{\Phi}_{11} = -\bar{\Phi}_{12} = \bar{\Phi}_{21} = \bar{\Phi}_{22} = \tfrac{1}{2}\bar{I} \tag{60a}$$

$$\bar{\Psi}_{11} = \bar{\Psi}_{12} = -\bar{\Psi}_{21} = \bar{\Psi}_{22} = \bar{I} \tag{60b}$$

en:

$$\bar{\Lambda} = 2(\bar{Z} + \bar{I})^{-1} = \bar{I} - \bar{S} \tag{61}$$

$$\bar{\Gamma} = (\bar{Z} + \bar{I})^{-1} = 2(\bar{I} - \bar{S}) \tag{62}$$

$\bar{K}$ en $\bar{L}$ zijn in dit geval respectievelijk de vector $\bar{A}$ van de invallende golven en de vector $\bar{B}$ van de gereflecteerde of verstrooide golven, terwijl $\bar{M}$ de verstrooiingsmatrix $\bar{S}$ is. Noteren we verder voor de ruisbronvector in dit geval $\bar{X}$, dan wordt vergelijking (52):

$$\bar{B} = \bar{S}\bar{A} + \bar{X} \tag{63}$$

waarbij geldt:

$$\bar{S} = (\bar{Z} - \bar{I})(\bar{Z} + \bar{I})^{-1} = (\bar{Z} + \bar{I})^{-1}(\bar{Z} - \bar{I}) \tag{64}$$

$$\bar{A} = \tfrac{1}{2}(\bar{Z} + \bar{I})\bar{J} \tag{65}$$

$$\bar{X} = (\bar{Z} + \bar{I})^{-1}\bar{E} \tag{66}$$

Zoals de componenten van $\bar{E}$ de dimensie en het karakter van de componenten van $\bar{V}$ hebben, zó hebben de componenten van $\bar{X}$ de dimensie en het karakter van de componenten van $\bar{B}$. Zoals de $\bar{V}_i$'s de e.m.k.'s van ruisspanningsbronnen aan de poorten zijn, zo zijn de $\bar{X}_i$'s de amplituden van ruisgolfbronnen, die hun golven uit de poorten van de n-poort uitstralen. [14])

Keren we nu terug tot de algemene transformatie. De getransformeerde dissipatiematrix $\bar{P}_M$ is (zie vergelijking (44)):

$$\bar{P}_M = \bar{\Lambda}^+ \bar{P}_Z \bar{\Lambda} \tag{67}$$

Substitutie van $\bar{Z}$ en $\bar{\Lambda}$ in termen van $\bar{M}$ – vergelijkingen (55) en (56) – levert $\bar{P}_M$ als functie van $\bar{M}$. Daar er voor $\bar{\Phi}$ en $\bar{\Psi}$ niet zulke relaties als vergelijking (37) behoeven te gelden, is de

[13]) De coördinatentransformatie kan zowel van de $\bar{Z}$- naar de $\bar{M}$-representatie, als in de tegengestelde richting worden uitgevoerd. De matrices $\bar{\Lambda}$ en $\bar{\Gamma}$ kunnen bijgevolg zowel in $\bar{Z}$ als in $\bar{M}$ worden uitgedrukt.

[14]) Als in de paragrafen **2**, **3** en **4** niet de J_i's maar de V_i's als de onafhankelijke variabelen waren gekozen, zou i.p.v. de impedantiematrix-representatie de admittantiematrix-representatie zijn verkregen. Het ruisen zou dan niet door ruisspanningsbronnen aan de poorten, maar door ruisstroombronnen over de poorten worden beschreven. Ook deze beide representaties zijn uiteraard door een lineaire transformatie met elkaar verbonden.

functie $\bar{P}_M$ van $\bar{M}$ niet noodzakelijk dezelfde als de functie $\bar{P}_Z$ van $\bar{Z}$. Zo geldt voor de verstrooiingsmatrix-representatie:

$$\bar{P}_S = \bar{I} - \bar{S}^+\bar{S} \qquad (68)$$

De getransformeerde ruisvermogensmatrix $\bar{G}_M$ is (zie vergelijking (47)):

$$\bar{G}_M = \bar{\Gamma}\bar{G}_Z\bar{\Gamma}^+ \qquad (69)$$

De vraag kan nu worden gesteld of $\bar{G}_M$ op dezelfde wijze als $\bar{G}_Z$ is te splitsen in een ruistemperatuur-matrix $\bar{T}_M$ en een ruisverdelingsmatrix $\bar{N}_M$ en hoe $\bar{T}_M$ en $\bar{N}_M$ samenhangen met, respectievelijk, $\bar{T}_Z$ en $\bar{N}_Z$. Beschouwen we nogmaals een passieve n-poort van uniforme temperatuur T. Daar scalaren buiten de transformatie gehaald mogen worden, levert transformatie van $\bar{G}_Z$, gegeven door vergelijking (30):

$$\bar{G}_Z = kT\bar{N}_Z\Delta f \qquad (70)$$

met vergelijking (69):

$$\bar{G}_M = \bar{\Gamma}(kT\bar{N}_Z\Delta f)\bar{\Gamma}^+ = kT\bar{\Gamma}\bar{N}_Z\bar{\Gamma}^+\Delta f \qquad (71)$$

Het ligt nu voor de hand om, in analogie met vergelijking (48), in de $\bar{M}$-representatie de ruisverdelingsmatrix:

$$\bar{N}_M = \bar{\Gamma}\bar{N}_Z\bar{\Gamma}^+ \qquad (72)$$

zo in te voeren, dat voor vergelijking (71) geschreven kan worden:

$$\bar{G}_M = kT\bar{N}_M\Delta f \qquad (73)$$

Met de vergelijkingen (55) en (57) kan $\bar{N}_M$ worden uitgedrukt in $\bar{M}$. Evenals bij $\bar{P}_M$ is, door het ontbreken van zulke betrekkingen als vergelijking (37), de matrix $\bar{N}_M$ niet dezelfde functie van $\bar{M}$ als $\bar{N}_Z$ van $\bar{Z}$ is. Zo geldt voor de verstrooiingsmatrix-representatie:

$$\bar{N}_S = \bar{I} - \bar{S}\bar{S}^+ \qquad (74)$$

Inderdaad, op thermodynamische gronden kan ook direct worden aangetoond dat het ruisen van een passieve n-poort $\bar{S}$ met uniforme temperatuur T wordt beschreven door [5]:

$$\bar{G}_S = kT(\bar{I} - \bar{S}\bar{S}^+)\Delta f = kT\bar{N}_S\Delta f \qquad (75)$$

In ieder coördinatensysteem kan vergelijking (73) zo worden veralgemeend, dat ook willekeurige ruisende n-poorten worden omvat door de scalar T te vervangen door een ruistemperatuur-matrix $\bar{T}_M$. Er is dan gemakkelijk af te leiden, dat $\bar{T}_M$ uit $\bar{T}_Z$ volgt met de gelijkvormigheidstransformatie:

$$\bar{T}_M = \bar{\Gamma}\bar{T}_Z\bar{\Gamma}^{-1} \qquad (76)$$

Zoals voor netwerktransformaties (zie paragraaf *7.1.*) kan ook voor coördinatentransformaties worden gesteld, dat de dissipativiteit (de positiviteit of index), de activiteit (de negativiteit), de reactiviteit (het defect) en de karakteristieke ruistemperaturen (eigenwaarden van de ruistemperatuur-matrix) invariant zijn. Deze grootheden zijn dus constanten van de n-poort, onafhankelijk van het min of meer toevallige coördinatensysteem dat gebruikt wordt om de n-poort te beschrijven.

8. Diagonalisatie

Voor een goede karakterisering van een netwerk is niet alleen nodig dat de waarden van de parameters, die het netwerk kenmerken, worden aangegeven, maar tevens dat de fysische betekenis van die netwerkconstanten wordt omschreven. Om inzicht in de fysische betekenis van de in de vorige paragraaf genoemde netwerkconstanten te verkrijgen zou het wenselijk zijn, als binnen een bepaalde signaalrepresentatie (zoals bijv. de verstrooiingsmatrix- of impedantiematrix-representatie) een netwerk zou kunnen worden gediagonaliseerd. De vraag rijst of er een netwerk-transformator, d.w.z. een algemene transformator (zie paragraaf *7.1.*), kan worden gevonden, die het netwerk in een diagonale vorm brengt. Niet alleen het signaalgedrag (d.w.z. de signaalgedrags-, de dissipatie- en de ruisverdelingmatrices) maar ook het ruisen – d.w.z. de ruisvermogensmatrix en de ruistemperatuur-matrix – moeten dan in diagonale vorm gebracht worden.

Is een n-poort $\bar{Z}$ in de impedantiematrix-representatie gegeven, dan luidt de vraag of er een transformatie $\bar{\Phi}$ en $\bar{\Psi}$, die voldoet aan de restricties van vergelijking (37), te vinden is, zó, dat al de transformaties (zie paragraaf *7.1.*):

$$\bar{Z}' = (\bar{\Phi}_{11}\bar{Z} + \bar{\Phi}_{12})(\bar{\Phi}_{21}\bar{Z} + \bar{\Phi}_{22})^{-1} \qquad (77a)$$

$$\bar{P}_{Z'} = \bar{\Lambda}^+\bar{P}_Z\bar{\Lambda} \qquad (77b)$$

$$\bar{N}_{Z'} = \bar{\Gamma}\bar{N}_Z\bar{\Gamma}^+ \qquad (77c)$$

$$\bar{G}_{Z'} = \bar{\Gamma}\bar{G}_Z\bar{\Gamma}^+ \qquad (77d)$$

$$\bar{T}_{Z'} = \bar{\Gamma}\bar{T}_Z\bar{\Gamma}^{-1} \qquad (77e)$$

simultaan een diagonaal resultaat opleveren. Het antwoord is bevestigend. Behoudens een enkel uitzonderingsgeval, dat we in paragraaf **10** nog kort zullen bespreken, kan er altijd voor iedere n-poort $\bar{Z}$ zo'n transformatie worden gevonden en onafhankelijk van het al of niet singulier zijn van één of meer van de matrices $\bar{Z}$, $\bar{P}_Z$, $\bar{N}_Z$, $\bar{G}_Z$ en $\bar{T}_Z$. Het bewijs, dat elders [8] uitvoerig is gepubliceerd, zullen we hier niet geven. Vooral als sommige van – of alle – bovengenoemde matrices singulier zijn is het nogal lang en gecompliceerd. Het kan echter constructief worden geleverd, zodat niet alleen de existentie van $\bar{\Phi}$ en $\bar{\Psi}$ wordt aangetoond, maar $\bar{\Phi}$ en $\bar{\Psi}$, tezamen met $\bar{\Lambda}$ en $\bar{\Gamma}$, ook expliciet worden verkregen. Hoe de algemene transformator (de diagonaliserende verliesvrije $2n$-poort) dan in feite moet worden gebouwd is een netwerksynthese-probleem waarop wij hier niet ingaan.

Als een n-poort $\bar{Z}$ wordt gediagonaliseerd, betekent dat, dat de nieuwe n-poort $\bar{Z}'$ zich gedraagt als een collectie van n niet met elkaar gekoppelde éénpoorten. Als dan tevens $\bar{G}_{Z'}$ diagonaal is, zijn de ruisspanningsbronnen van die éénpoorten onderling niet gecorreleerd. Iedere éénpoort vertegenwoordigt een elementair dissipatief, actief of reactief deel van de n-poort, zoals dat van buitenaf onderscheiden kan worden. De n-poort is dan tot de meest elementaire vorm getransformeerd. Een verdere detaillering is ook niet mogelijk. Hoewel er in feite inwendig meer elementair-fysische delen aanwezig kunnen zijn, zijn er door de n-poorten heen van buitenaf niet meer dan n afzonderlijk waar te nemen.[15] In de oorspronkelijke n-poort zijn door een min of meer ingewikkelde koppeling, onderling en aan de poorten, die delen niet afzonderlijk te herkennen. De niet-gecorreleerde ruisvermogens van de elementaire delen worden door de koppeling gemengd, zodat de uit de verschillende poorten naar buiten uitgestraalde ruisvermogens wel zijn

[15]) Men moet hierbij wel bedenken, dat dit waar is voor zover slechts naar het signaalgedrag bij één frequentie f en het ruisen in één kleine frequentieband Δf wordt gekeken.

gecorreleerd. Door de diagonaliserende algemene transformator wordt die koppeling uitwendig juist opgeheven, zodat de afzonderlijke delen weer manifest worden.

9. De elementaire éénpoorten

Van de n diagonale elementen van $\bar{P}_{Z'}$ en $\bar{N}_{Z'}$ zijn er een aantal p positief, een aantal q negatief en een aantal d nul. Van de n elementaire éénpoorten zijn er p dissipatief (positieve weerstand), q actief (negatieve weerstand) en d reactief (kortsluiting). Om deze reden werden p, q en d in sub-paragraaf *7.1.* respectievelijk de dissipativiteit, de activiteit en de reactiviteit van de n-poort genoemd.

Het positief (semi-)definiete karakter van $\bar{G}_Z$ (en van $\bar{G}_{Z'}$) houdt in, dat de diagonale elementen van $\bar{G}_{Z'}$ positief (of nul) zijn, maar niet negatief. Fysisch betekent dit dat de elementaire éénpoorten zelf geen negatief ruisvermogen uitstralen, d.w.z. niet spontaan, zonder oorzaak van buitenaf, energie absorberen.

Uit de definitie van de ruistemperatuur-matrix in de vergelijking (35) volgt, dat de overeenkomstige diagonale elementen van de matrices $\bar{G}_{Z'}$, $\bar{N}_{Z'}$ en $\bar{T}_{Z'}$ met elkaar zijn verbonden. Voor de $i$de elementen G_i, N_i en T_i, die betrekking hebben op de $i$de elementaire éénpoort, geldt:

$$G_i = kT_iN_i\Delta f \tag{78}$$

of:

$$T_i = k^{-1}G_iN_i^{-1}\Delta f^{-1} \tag{79}$$

Daar G_i altijd positief is (althans niet negatief) wordt het teken van T_i bepaald door dat van N_i. Een dissipatieve éénpoort, $N_i > 0$, heeft een positieve karakteristieke ruistemperatuur: $T_i \geqq 0$. Een actieve éénpoort, $N_i < 0$, heeft een negatieve karakteristieke ruistemperatuur: $T_i \leqq 0$. Voor een reactieve éénpoort, $N_i = 0$, is de zaak iets ingewikkelder: zo'n éénpoort kan geen vermogen absorberen en zal bijgevolg ook (vrijwel) nooit vermogen uitstralen; ook geen ruisvermogen. Meestal zullen zowel G_i als N_i gelijk aan nul zijn; vergelijking (79) kan dan niet worden toegepast. Uit vergelijking (78) volgt echter, dat T_i in dit geval irrelevant is en iedere willekeurige waarde mag hebben. Een redelijke keuze voor T_i is de 'echte' temperatuur van de n-poort of de omgevingstemperatuur, maar T_i mag evengoed nul gesteld worden. In het uitzonderlijke geval van een reactieve éénpoort, die toch ruisvermogen uitstraalt, is T_i oneindig groot.

In paragraaf **6** is opgemerkt, dat de definitie van $\bar{T}_Z$ in de vergelijking (35) niet is toe te passen, als $\bar{N}_Z$ singulier is. Die singulariteit heeft betrekking op het reactieve deel van de n-poort $\bar{Z}$. Voor dat deel is de ruistemperatuur echter irrelevant; zij kan vrij worden gekozen. Hiervan gebruik makend kan nu ook bij singuliere $\bar{N}_Z$ een $\bar{T}_Z$ worden gedefinieerd. Eerst worden $\bar{G}_Z$ en $\bar{N}_Z$ beide gediagonaliseerd en met vergelijking (79) de T_i's van de dissipatieve en de actieve éénpoorten bepaald; voor de T_i's van de reactieve éénpoorten wordt vervolgens een keuze gemaakt. Tenslotte wordt teruggetransformeerd naar de oorspronkelijke n-poort $\bar{Z}$; de geretransformeerde ruistemperatuurmatrix is dan $\bar{T}_Z$ van $\bar{Z}$. De elementen van $\bar{T}_Z$ bevatten nu ook willekeurige delen, die slechts betrekking hebben op het reactieve gedeelte van $\bar{Z}$. Om deze niet ter zake doende delen te vermijden, zouden de T_i's van de reactieve elementaire éénpoorten alle gelijk aan nul kunnen worden gekozen.

10. Hagelruis

In paragraaf **8** is gesteld, dat er op de mogelijkheid tot diagonalisatie slechts één enkele uitzondering is. Wel zijn $\bar{P}_Z$ en $\bar{N}_Z$ (en dan ook $\bar{Z}$) altijd in diagonale vorm te brengen, maar het kan voorkomen, dat dit voor één of meer paren van éénpoorten voor $\bar{G}_Z$ (en dan ook voor $\bar{T}_Z$) niet gelijktijdig het geval is. Van zo'n paar éénpoorten is er dan altijd één dissipatief en de andere actief, terwijl twee ruisbronnen volledig gecorreleerd zijn. De gedeelten van $\bar{N}_{Z'}$ en $\bar{G}_{Z'}$, die op zo'n paar betrekking hebben, zijn in essentie:

$$\bar{N}_{Z'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{80}$$

$$\bar{G}_{Z'} = \begin{pmatrix} g & g \\ g & g \end{pmatrix} = g\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{81}$$

Volgens vergelijking (36) is het corresponderende deel van $\bar{T}_Z'$ dan:

$$\bar{T}_{Z'} = k^{-1}g \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Delta f^{-1} \tag{82}$$

Er is geen transformatie $\bar{\Gamma}$ te vinden, die onder behoud van vergelijking (80), $\bar{G}_{Z'}$ en $\bar{T}_{Z'}$ diagonaliseert. Wel kan de scalaire factor g willekeurig worden gevarieerd en zelfs gelijk aan nul worden gemaakt. De twee eigenwaarden van $\bar{T}_{Z'}$, d.w.z. de karakteristieke ruistemperaturen van het paar, zijn nul.

Een geheel gecorreleerd paar éénpoorten heeft betrekking op hagelruis; daarbij mogen dan geen looptijdverschijnselen, additionele dissipatie, of soortgelijke effecten optreden. Een voorbeeld wordt gevonden in een ideaal transistor-model. Generatie en recombinatie van ladingsdragers, ruimteladingscapaciteiten, enz. mogen geen rol spelen; gebeurt dat wel, dan wordt de ontaarding van $\bar{T}_{Z'}$ opgeheven, d.w.z. de twee eigenwaarden worden verschillend van nul en krijgen tegengesteld teken. $\bar{G}_{Z'}$ en $\bar{T}_{Z'}$ kunnen dan ook weer worden gediagonaliseerd. Bij werkelijke transistoren zal dit altijd het geval zijn.

Een ander voorbeeld is een triode in een geaarde roosterschakeling. De gelijkstroom in de ingang (d.w.z. het kathoderoostercircuit) is gelijk aan die in de uitgang (d.w.z. het anoderoostercircuit) tenminste zolang er geen roosterstromen optreden. Mits er geen looptijdeffecten optreden, is de hagelruis ten gevolge van de gelijkstroom aan de ingang dezelfde als die aan de uitgang, afgezien van de intensiteit. Verder blijkt een triode-schakeling zowel een dissipatief als een actief deel te omvatten; zo'n schakeling kan energie opnemen, maar ook afgeven.

Het nul zijn van de karakteristieke ruistemperaturen, evenals het feit dat g identiek nul kan worden gemaakt, betekent dat met uitwendige middelen (d.w.z. terugkoppeling, enz.) de hagelruis naar buiten toe geheel nul kan worden gemaakt. De hagelruis aan de ingang kan geheel worden gecompenseerd met die aan de uitgang en omgekeerd.

11. Andere representaties en diagonalisatie

In de paragrafen **8** en **9** wordt de diagonalisatie van een n-poort besproken in de impedantiematrix-representatie. In andere signaalrepresentaties is diagonalisatie ook altijd mogelijk. Het resultaat, d.w.z. de elementaire diagonale n-poort, is evenwel niet altijd hetzelfde, maar de kenmerkende constanten – p, q, d – en de T_i's wel.

In de eerste plaats onderscheiden we gepaarde representaties;

dat zijn coördinatensystemen, waarbij overeenkomstige componenten van de excitatie- en de responsie-vectoren naar grootheden aan een en dezelfde poort verwijzen. Zo zullen K_i en L_i uitsluitend grootheden aan de *i*de poort representeren. In een gepaarde representatie zal bij diagonalisatie het *i*de element M_i van de signaalgedragsmatrix $\overline{M}$ de variabelen K_i en L_i aan de *i*de poort verbinden, terwijl alle koppeling van de *i*de poort met de andere poorten is opgeheven. Dit betekent, dat de *n*-poort is gesplitst in *n* éénpoorten. Dit is niet alleen het geval bij de impedantiematrix-representatie, maar bij alle signaalrepresentaties, waarbij K_i en L_i lineair onafhankelijke combinaties van J_i en V_i zijn. Voorbeelden hiervan zijn de admittantiematrix-representatie met $K_i = V_i$ en $L_i = J_i$, alsmede de verstrooiingsmatrix-representatie met $K_i = A_i = \frac{1}{2}(V_i + J_i)$ en $L_i = B_i = \frac{1}{2}(V_i - J_i)$. In alle gepaarde representaties levert diagonalisatie *in concreto* hetzelfde elementaire diagonale netwerk: een collectie van *n* éénpoorten.

In vele andere coördinatensystemen verwijzen overeenkomstige componenten van de excitatie- en de responsie-vectoren niet naar één en dezelfde poort. Zo verwijzen bij de ketting- en de transfermatrices de componenten van de excitatie-vector in paren naar bepaalde poorten (d.w.z. één paar per poort), terwijl de componenten van de responsie-vector in paren naar de andere poorten verwijzen. Een voorbeeld hiervan hebben we eerder gezien, waar in vergelijking (36) V_1 en J_1 samen naar de eerste ingangspoort, V_1' en J_1' samen naar de eerste uitgangspoort, enz., verwijzen; er zijn nog vele andere – al of niet praktische – mogelijkheden. Diagonalisatie in niet-gepaarde coördinatensystemen levert geheel andere elementaire diagonale *n*-poorten dan in gepaarde systemen; zij bestaan niet uit collecties van éénpoorten.

Aan een speciaal type coördinatensysteem, de transmissiematrix-representatie, willen we nog enige aandacht schenken. Laat K_i de ingaande golf in de *i*de poort zijn en L_i de uitgaande golf in een andere poort, bijv. de $(i+1)$de poort. Deze signaalrepresentatie heeft veel gemeen met de verstrooiingsmatrixrepresentatie; de verstrooiingsmatrix kan worden opgevat als een speciale transmissiematrix.

Diagonalisatie in een transmissiematrix-representatie splitst een *n*-poort in *n* niet-gekoppelde unilaterale transmissiewegen. Die transmissiewegen verzwakken als ze dissipatief zijn, versterken als ze actief zijn en laten onverzwakt door als ze reactief zijn. Bij de verstrooiingsmatrix is de transmissie naar dezelfde poort terug, d.w.z. reflectie. Voorbeelden van elementaire diagonale transmissienetwerken zijn een aan in- en uitgang aangepaste versterker (twee poorten) en een aangepaste circulator met totale isolatie (drie of meer poorten). Het eerste voorbeeld is actief-dissipatief; het tweede uitsluitend dissipatief of (in het ideale geval van geen tussenschakeldemping) reactief. De transmissiematrix-representatie is vooral van belang voor ketens van netwerken, met name van tweepoorten.

12. Tweepoorten in cascade

Om de voorgaande beschouwingen reliëf te geven worden in deze paragraaf hun toepassing op tweepoorten, die in een keten achter elkaar zijn geschakeld, in het kort besproken.

Laten we – om te beginnen – veronderstellen, dat de tweepoorten in de keten zijn opgenomen met behulp van een algemene transformator, zoals is aangegeven in fig. 7; $\overline{Z}_1 \ldots \overline{Z}_n$ zijn de tweepoorten en $Tr_1 \ldots Tr_n$ de algemene transformatoren. Met de transformatoren kan iedere mogelijke terugkoppeling tussen de in- en de uitgang van een éénpoort worden aangebracht, terwijl ook de koppeling tussen de éénpoorten onderling kan worden gevarieerd. Op deze wijze kunnen de individuele éénpoorten worden gediagonaliseerd en opeenvolgende éénpoorten op elkaar worden aangepast.

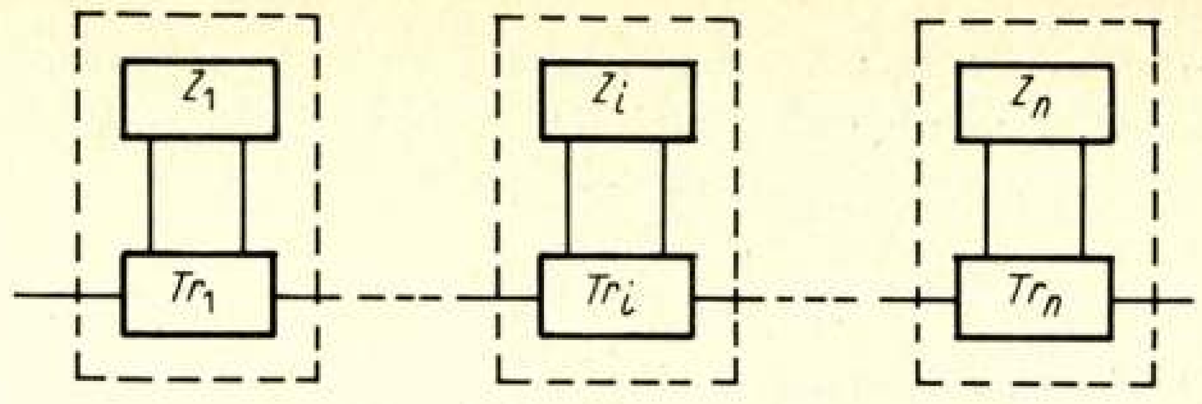


Fig. 7. De *n* tweepoorten $\overline{Z}_1 \ldots \overline{Z}_n$ kunnen met de algemene transformatoren $Tr_1 \ldots Tr_n$ in een keten worden geschakeld.

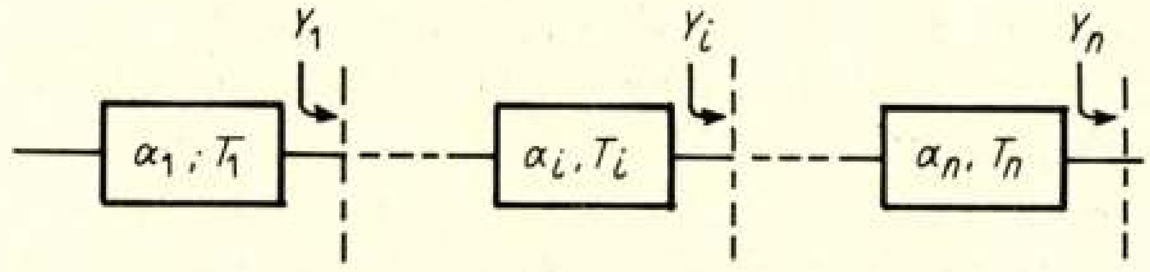


Fig. 8. Een keten van *n* wederzijds aangepaste ruisende tweepoorten is beschreven als de versterkingen of verzwakkingen α_i en de effectieve uitgangsruistemperaturen T_i bekend zijn.

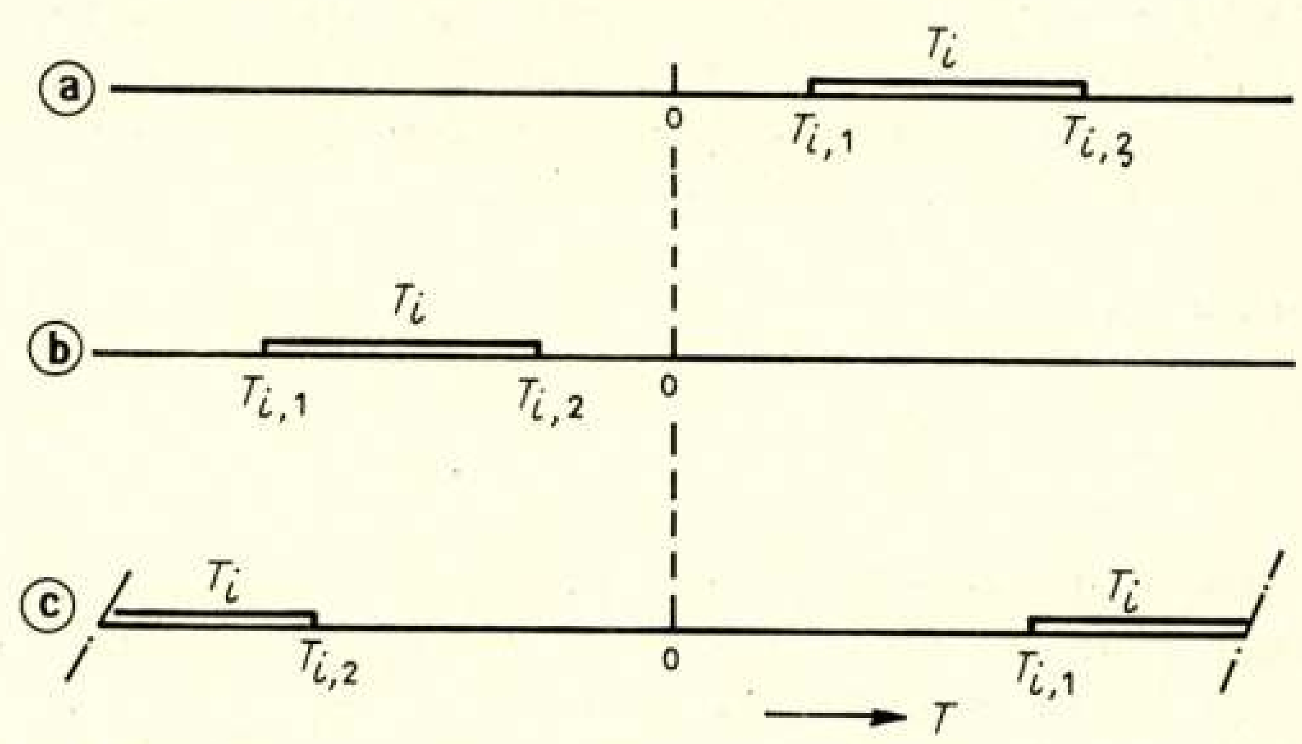


Fig. 9. Mogelijke waarden van de effectieve uitgangsruistemperatuur T_i van de *i*de tweepoort; $T_{i,1}$ en $T_{i,2}$ zijn de karakteristieke ruistemperaturen. a) tweevoudige dissipatieve tweepoort, b) tweevoudige actieve tweepoort, c) dissipatief/actieve tweepoort.

In de vorige paragraaf is opgemerkt, dat de transmissiematrix-representatie zeer geschikt is voor ketens. Beschouwen we nu de combinatie $\overline{Z}_i$ en Tr_i als de *i*de tweepoort in de keten en kiezen we, ter vereenvoudiging, Tr_i zó, dat de in- en de uitgang zijn aangepast aan die van de naaste buren, dan is het signaalgedrag (d.w.z. de transmissiematrix) steeds gediagonaliseerd. De ruisgolf-vermogensmatrix behoeft dat dan nog niet te zijn. Voor ons doel is de vermogenstransmissie α_i in de voorwaartse richting van belang. Voor $\alpha_i > 1$ spreken we van (vermogens-)versterking en voor $\alpha_i < 1$ van (vermogens-)verzwakking. De uit de uitgang uitgestraalde ruisgolf Y_i is verder ook nog van belang; in fig. 8 is een en ander geïllustreerd.

We introduceren nu een effectieve uitgangstemperatuur T_i met:

$$\overline{Y_i Y_i^*} = kT_i(1 - \alpha_i)\Delta f \tag{83}$$

T_i heeft hetzelfde teken als $(1-\alpha_i)$; bij versterking is T_i dus negatief en bij verzwakking positief. Indien de transformator

Tr_i naast het signaalgedrag ook nog het ruisen diagonaliseert, is T_i gelijk aan één van de twee karakteristieke ruistemperaturen $T_{i,1}$ en $T_{i,2}$ van de oorspronkelijke tweepoort $\bar{Z}_i$. In alle andere gevallen heeft T_i een waarde die ergens tussen $T_{i,1}$ en $T_{i,2}$ in ligt, met dien verstande dat, als $T_{i,1}$ en $T_{i,2}$ verschillend teken hebben, het mogelijke traject van T_i gesloten is over oneindig en niet over nul.[16] In fig. 9 zijn de mogelijke gebieden van T_i aangegeven; er is te bewijzen dat T_i niet buiten deze gebieden is in te stellen.

12.1 Het beste gebruik van een tweepoort

Indien op de ingang van de eerste tweepoort een signaal A_0 en een ruisgolf X_0 invallen, zoals is aangegeven in fig. 10, kunnen we voor X_0 noteren:

$$\overline{X_0X_0^*} = kT_0\Delta f \tag{84}$$

waarin T_0 een effectieve temperatuur voor de voorgaande netwerken vormt. Uit de uitgang worden een signaal A_1 en een ruisgolf X_1 uitgestraald; hiervoor geldt:

$$A_1A_1^* = \alpha_1A_0A_0^* \tag{85}$$

$$\overline{X_1X_1^*} = \alpha_1\overline{X_0X_0^*} + \overline{Y_1Y_1^*} = (\alpha_1kT_0 + (1-\alpha_1)kT_1)\Delta f \tag{86}$$

De signaal-ruis-vermogensverhouding aan de ingang R_0 en aan de uitgang R_1 zijn:

$$R_0 = A_0A_0^*/\overline{X_0X_0^*} \tag{87}$$

$$R_1 = \alpha_1A_0A_0^*/(\alpha_1\overline{X_0X_0^*} + \overline{Y_1Y_1^*}) \tag{88}$$

Het quotiënt van deze twee verhoudingen is het ruisgetal F_1:

$$F_1 = \frac{R_0}{R_1} = 1 + \frac{\overline{Y_1Y_1^*}}{\alpha_1\overline{X_0X_0^*}} = 1 + \frac{1-\alpha_1}{\alpha_1}\cdot\frac{T_1}{T_0} \tag{89}$$

Zoals reeds is opgemerkt in paragraaf **1** hangt het ruisgetal van een tweepoort, behalve van de ruisintensiteit T_1 van de tweepoort zelf, ook af van de signaaloverdrachtseigenschappen α_1 en van de ruisintensiteit T_0 van de voorgaande netwerken. Bovendien is voor een tweepoort T_1 niet een constante, maar kan T_1 alle waarden tussen $T_{1,1}$ en $T_{1,2}$ aannemen. Het produkt $(1-\alpha_1)T_1$ is niet-negatief, zodat altijd geldt:

$$F_1 \geqq 1 \tag{90}$$

Voor praktisch gebruik wil men F_1 zo klein mogelijk hebben; voor een gegeven α_1 moet dus de absolute waarde van T_1 zo klein mogelijk zijn. Wordt de tweepoort als versterker gebruikt, dan wordt T_1 gelijk gemaakt aan $T_{1,2}$ voor optimale F_1 en, bij gebruik als verzwakkend element, gelijk aan $T_{1,1}$ (zie fig. 9). Met betrekking tot het ruisen kan een netwerk het best in gediagonaliseerde vorm worden toegepast; het elementaire deel, dat in absolute waarde de kleinste karakteristieke ruistemperatuur heeft, wordt dan benut. Beter kan het niet.

In vergelijking (89) komt het quotiënt T_1/T_0 voor; hieruit kan nog een interessante conclusie worden getrokken. Dit quotiënt moet noch te groot, noch te klein zijn. Is T_1/T_0 groot, dan ruist het netwerk te veel voor het te behandelen signaal-ruis-complex aan de ingang. Is T_1/T_0 klein, dan is het netwerk te goed (en dus te kostbaar).

[16]) Ook om nog andere redenen zou een betere maat voor de intensiteit van het ruisen de inverse van de temperatuur zijn. Het toegestane gebied zou zich dan over nul sluiten.

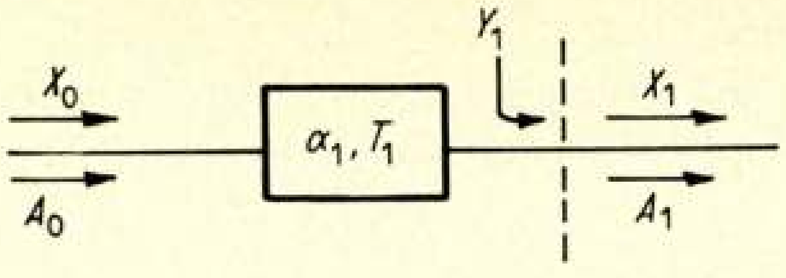


Fig. 10. Niet alleen versterkt of verzwakt, α_1, een tweepoort een signaal-ruiscomplex, A_0, X_0, maar hij voegt er tevens ruis, Y_1, aan toe.

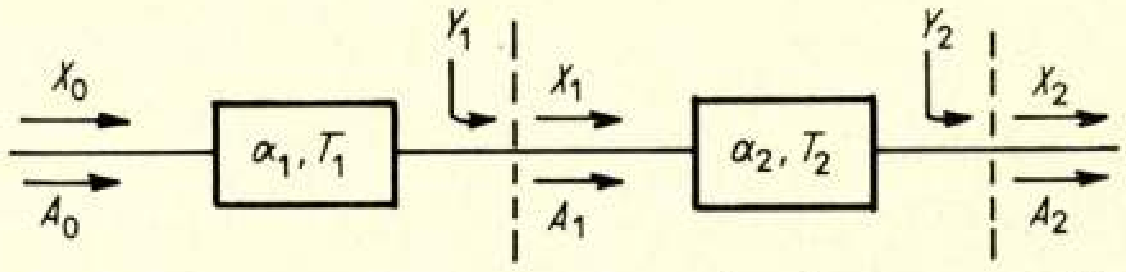


Fig. 11. De beste volgorde van twee ruisende tweepoorten in cascade wordt bepaald door hun effectieve uitgangsruistemperaturen T_1 en T_2.

12.2 De beste volgorde van tweepoorten

Indien tweepoorten in een keten achter elkaar zijn geschakeld, rijst de vraag naar de beste volgorde. De eerste twee tweepoorten in een keten zijn geschetst in fig. 11; uit de uitgang van de laatste wordt een signaal A_2 en een ruisgolf X_2 uitgestraald; hiervoor geldt (zie vergelijkingen (85) en (86)):

$$A_2A_2^* = \alpha_2\alpha_1A_0A_0^* \tag{91}$$

$$\begin{aligned}\overline{X_2X_2^*} &= \alpha_2\alpha_1\overline{X_0X_0^*} + \alpha_2\overline{Y_1Y_1^*} + \overline{Y_2Y_2^*}\\ &= (\alpha_2\alpha_1kT_0 + \alpha_2(1-\alpha_1)kT_1 + (1-\alpha_2)kT_2)\Delta f\end{aligned} \tag{92}$$

Voor het ruisgetal F_{12} van de combinatie van de 2 tweepoorten in de volgorde 1-2 geldt:

$$F_{12} = \frac{R_0}{R_2} = 1 + \frac{1-\alpha_1}{\alpha_1}\cdot\frac{T_1}{T_0} + \frac{1}{\alpha_1}\cdot\frac{1-\alpha_2}{\alpha_2}\cdot\frac{T_2}{T_1} \tag{93}$$

Het ruisgetal F_{21} van de combinatie in omgekeerde volgorde wordt verkregen door in de vergelijking de indices 1 en 2 cyclisch te verwisselen. De volgorde 1-2 is beter dan de volgorde 2-1, als geldt:

$$F_{12} < F_{21} \tag{94}$$

of, na enige omwerking:

$$(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)T_1 > (1-\alpha_1)(1-\alpha_2)T_2 \tag{95}$$

Er doen zich nu drie gevallen voor:

1. Zijn beide tweepoorten verzwakkend, d.w.z. α_1, $\alpha_2 < 1$, dan luidt de voorwaarde:

$$T_1 > T_2 \tag{96}$$

De verzwakker met de hoogste ruistemperatuur kan het best voorop worden geplaatst.

2. Zijn beide tweepoorten versterkend, d.w.z. α_1, $\alpha_2 > 1$, dan luidt de voorwaarde eveneens:

$$T_1 > T_2 \tag{97}$$

De versterker met de hoogste, d.w.z. met naar absolute waarde de kleinste temperatuur, dient voorop te gaan.

3. Is de ene tweepoort een versterker en de andere een verzwakker, d.w.z. $\alpha_1 > 1$; $\alpha_2 < 1$ of $\alpha_1 < 1$; $\alpha_2 > 1$, dan wordt de voorwaarde:

$$T_1 < T_2 \tag{98}$$

Eén van beide temperaturen T_1 en T_2 is negatief, de andere positief; uit vergelijking (98) volgt, dat de tweepoort met de negatieve temperatuur (d.w.z. de versterker) voorop moet gaan.

Indien negatieve temperaturen als 'heter' dan positieve worden opgevat [9], kunnen de drie gevallen in één worden verenigd. Het criterium voor de beste volgorde stelt dan dat de 'heetste' tweepoort voorop gaat en de 'koudste' achteraan komt. De beste versterker moet vooraan en de beste verzwakker achteraan worden geplaatst.

12.3. Noise measure

De beste volgorde in een keten wordt niet door de ruisgetallen van de tweepoorten bepaald, maar door de effectieve uitgangsruistemperaturen. Om de beste volgorde te bepalen hebben *Haus* en *Adler* het begrip 'noise measure' ingevoerd (zie paragraaf **1**). Substitutie van vergelijking (89) en vergelijking (1) levert voor de eerste tweepoort:

$$M_1 = \frac{1-\alpha_1}{\alpha_1} \cdot \frac{T_1}{T_0} \cdot (1-\alpha_1{}^{-1})^{-1} = -\frac{T_1}{T_2} \tag{99}$$

De 'noise measure' is direct verbonden met de effectieve uitgangs-ruistemperatuur; deze 'noise measure' is dus nog niet een netwerk-kenmerkende grootheid. Die wordt eerst verkregen met de kleinst mogelijke waarde van M_1 (de optimale 'noise measure' M_{opt}) als weer de karakteristieke ruistemperatuur met de kleinste absolute waarde wordt genomen.

Evenals het ruisgetal hangt de 'noise measure' nog af van de intensiteit van de ruis op de ingang. Ernstiger is, dat met de definitie van vergelijking (1) de 'noise measure' in feite slechts voor de transmissiematrix-representatie is gedefinieerd. Geïnterpreteerd als karakteristieke ruistemperatuur krijgt ze echter een meer algemene betekenis, ook in andere signaalrepresentaties.

13. Conclusie

In een kleine frequentieband karakteriseren de grootheden p, q en d (d.w.z. de index, de negativiteit en het defect van de dissipatie- en van de ruisverdelingsmatrix) het signaalgedrag van een netwerk. Zij bepalen respectievelijk de dissipativiteit, de activiteit en de reactiviteit. Zij doen dat onafhankelijk van de verschillende coördinatensystemen waarin het netwerk kan worden beschreven.

Op dezelfde – van de coördinatensystemen onafhankelijke – wijze leggen de karakteristieke ruistemperaturen, d.w.z. de eigenwaarden van de ruistemperatuur-matrix, de intensiteit van het ruisen vast. Dit gebeurt los van de (min of meer toevallige) signaaloverdrachtseigenschappen van het netwerk. De karakteristieke ruistemperaturen geven aan welke optimale ruiseigenschappen met een gegeven netwerk kunnen worden verkregen; betere resultaten dan die, verkrijgbaar met de karakteristieke ruistemperatuur met de kleinste absolute waarde, zijn niet mogelijk. De karakteristieke ruistemperaturen geven tenslotte ondubbelzinnig uitsluitsel op zulke vragen als die naar de beste volgorde van netwerken in een keten e.d.

Literatuur

[1] D. O. NORTH; RCA Rev. **6**, 1942, pp. 302 ... 331.
[2] H. T. FRÜS; Proc. Inst. Radio Engrs **32**, 1944, pp. 419 ... 422.
[3] A. VAN DER ZIEL: 'Noise'; Prentice Hall, New York, 1954.
[4] H. A. HAUS and R. B. ADLER: 'Circuit theory of linear noisy networks'; John Wiley, New York, 1959.
[5] H. BOSMA: 'On the theory of linear noisy systems' (thesis Eindhoven); Philips Res. Repts. Suppl., 1967, no. **10**.
[6] A. E. SIEGMAN: Proc. Inst. Radio Engrs. **49**, 1961, pp. 633 ... 634.
[7] R. Q. TWISS: J. Appl. Phys. **26**, 1955, pp. 599 ... 602.
[8] H. BOSMA: J. Appl. Phys. **26**, 1955, Hoofdstuk 4.
[9] C. KITTEL: 'Elementary statistical physics'; John Wiley, New York, 1958, pp. 113 ... 116.

Korte technische berichten

'TIROS M'-weersatelliet

De 'TIROS M'-weersatelliet werd gebouwd door RCA onder leiding van NASA's 'Goddard Space Flight Center'; hij werd op 23 januari 1970 gelanceerd en beschrijft een cirkelvormige baan over de polen op een hoogte van 790 km, met een omloopduur van 115,2 min.

'TIROS M' is de opvolger van de zgn. ESSA-satellieten (ESSA: Environmental Science Services Administration); hij kan, daar hij is uitgerust met infrarood-apparatuur, eens per 12 h een volledig overzicht van het weer op aarde verschaffen.

De voornaamste sensoren aan boord van de satelliet zijn televisiecamera's en 'scanning'-radiometers. Men onderscheidt het zgn. 'Advanced Vidicon subsystem (AVC)' en het zgn. 'Automatic Picture Transmission (APT) TV-system'. Het AVC-systeem bestaat uit een TV-camera en een driekanaalsbandrecorder met bijbehorende elektronica; het APT-systeem bestaat uit een TV-camera en bijbehorende elektronica. Alle hiervóór genoemde systemen zijn geheel dubbel uitgevoerd.

Gedurende de omloop verzamelt een AVC-camera de gegevens betreffende de bewolking in het daglichtgedeelte; deze gegevens worden op de bandrecorder vastgelegd. Op commando van de aarde wordt de verzamelde informatie overgezonden naar 'Command and Data Acquisitions Stations (CDA)' in Alaska en Virginia, vanwaar de data weer worden doorgeseind naar het 'National Environmental Satellite Center'. Het APT-systeem verzorgt de directe overdracht van de meetgegevens t.b.v. lokale gebruikers.

De 'scanning'-radiometer meet de intensiteit van de infraroodstraling gedurende dag en nacht; ook hier worden de gegevens òf periodiek (vastgelegd op bandrecorder) òf 'real-time' door de satelliet naar de aarde overgeseind.

De TV-camera's van het APT-systeem maken per kringloop 11 opnamen; elke opname bestrijkt een gebied van 1800 km × 1200 km; twee opeenvolgende opnamen overlappen elkaar voor 30%. De camera van het AVC-systeem maakt eveneens 11 opnamen per kringloop, maar nu met per opname een gebied van 1800 km × 1800 km (50% overlapping).

Behalve de hiervóór genoemde systemen bevat de 'TIROS M' bovendien nog een zgn. 'Flat Plate Radiometer' en een 'Solar Proton Monitor', die resp. gegevens verschaffen omtrent het warmte-evenwicht van de aarde en de dichtheid van de van de zon afkomstige protonen. Deze meetgegevens worden vastgelegd op een 'Incremental Tape Recorder' en op commando naar de aardstations overgeseind.

De satelliet weegt 306 kg; zijn afmetingen bedragen 123 cm × 102 cm × 102 cm. Drie panelen (elk 91 cm × 175 cm) met zonnecellen verschaffen de satelliet een maximaal vermogen van 500 W. In tegenstelling tot de ESSA-satellieten wordt de 'TIROS M' met behulp van mechanische en elektronische stabilisatie-inrichtingen voortdurend in een stand loodrecht op het aardoppervlak gehouden.

RCA-NEWS, Release DS 351, februari 1970.